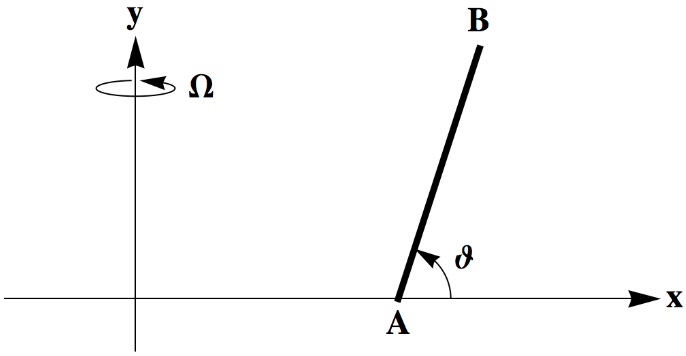
Università degli Studi di Padova

Laurea Triennale in Matematica
Fisica Matematica
II Compitino di Fisica Matematica — 9 Maggio 2014
Durata: 2 ore

Attenzione: Riconsegnate DUE fogli (protocollo bianchi, a 4 facciate) su entrambi scrivete chiaramente cognome e nome. Sul primo –che numerate con 1– svolgete l'*esercizio*, sul secondo –numerato con 2– svolgete le domande di *teoria*. Si può uscire dall'aula solo dopo aver consegnato definitivamente il compito.

1 *Esercizio*

Il sistema $Oxyz$ è posto in rotazione uniforme rispetto agli spazi inerziali attorno all'asse delle y con velocità angolare costante $\mathbf{\Omega}=\Omega\, e_y$. L'asse y è verticale ascendente (ovvero sul sistema agisce la gravità, $\mathbf{g}=-g\, e_y,\ g>0$). Nel piano Oxy è posta un'asta omogenea di estremi A e B e di lunghezza ℓ e massa m. L'estremo A dell'asta è fissato al punto $(\ell,0,0)$. Chiamando ϑ l'angolo orientato in senso antiorario formato dal versore e_x ed il versore $AB/|AB|$,
a. si scriva l'energia potenziale del sistema (cosa si può dire della componente Lagrangiana di sollecitazione di Coriolis?);
b. si determinino gli Ω per i quali la configurazione $\vartheta=-\pi/3$ è di equilibrio;
c. si verifichi la stabilità di tale configurazione di equilibrio;
d. si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno all'equilibrio.



2 *Teoria*

a. Si considerino le equazioni di Lagrange per una generica funzione Lagrangiana $L(q,\dot q,t)$, $q\in\mathbb{R}^N$. Mostrare che esiste un integrale primo per esse se la funzione Lagrangiana è indipendente dal tempo, cioè $L=L(q,\dot q)$. Mostrare che nel caso la funzione Lagrangiana sia di tipo meccanico, cioè $L(q,\dot q)=T(q,\dot q)-\mathcal{U}(q)$, tale integrale primo è esattamente l'energia totale.

b. Si consideri la deduzione delle equazioni di Lagrange per un sistema meccanico vincolato di n particelle di massa $m_i>0$, $i=1,\dots,n$, e basata su una locale immersione vincolare:

$$U\ni q\mapsto \breve{OP}_i(q)\big|_{i=1,\dots,n}\in\mathbb{R}^{3n},$$

per qualche aperto $U\subset\mathbb{R}^N$. Se vogliamo che le equazioni di Lagrange scritte infine in forma normale, $\dot x=X(x)$, $x=(q,v)\in\mathbb{R}^{2N}$, siano tali che X sia di classe C^1, bisogna chiedere che l'immersione vincolare $\breve{OP}_i(q)$ sia almeno C^k con quale k? Motivare la risposta.

c. Si pensi al pendolo con viscosità:

$$\ddot\theta=-\frac{g}{\ell}\sin\theta-k\dot\theta\qquad (g,\ell,k>0).$$

(i) Scrivere una funzione di Lyapunov per la Lyapunov stabilità (semplice) di $\theta_E=0$.
(ii) Dire se tale funzione trovata è valida anche per l'asintotica stabilità di tale equilibrio.
(iii) Dire infine se tale equilibrio è, o meno, asintoticamente Lyapunov stabile.

Soluzione all'esercizio

a. Questo sistema ha i potenziali della forza peso e della forza centrifuga (siamo nel caso in cui, essendo velocità angolare Ω e velocità delle masse nel piano vincolare, la forza di Coriolis viene annullata dalla reazione vincolare, in altre parole, la Componente Lagrangiana di Sollecitazione $Q_\theta^{Coriolis} \equiv 0$). Nello specifico, l'unico punto importante nel riferimento non-inerziale ha coordinate

$$OG = OA + AG = (\ell, 0) + \frac{\ell}{2}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$$

e di conseguenza

$$V_{AB}^g = mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta.$$

Chiamando I il momento di inerzia rispetto all'asse delle y dell'asta AB, la forza centrifuga ha invece come potenziale

$$V_{AB}^{cf} = -\frac{1}{2}\Omega^2 I.$$

La difficoltà è insita nel calcolare il momento angolare per l'asta AB. L'operatore di inerzia $\mathcal{I}_G$ di un asta, nel sistema di riferimento $e_1 = e_{AB} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta, 0), e_2 = e_z \wedge e_1 = (-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)$, ed $e_3 = e_z = (0, 0, 1)$, è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m\frac{\ell^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{\ell^2}{12} \end{pmatrix}.$$

Il versore associato alla velocità angolare, rappresentato nel sistema di riferimento solidale all'asta, è

$$e_y = (e_y \cdot e_1)e_1 + (e_y \cdot e_2)e_2 + (e_y \cdot e_3)e_3 = e_1 \sin\vartheta + e_2 \cos\vartheta.$$

Quindi il momento di inerzia I_a, dove a è l'asse baricentrico $G + \mathbb{R}e_y$ è $e_y \cdot \mathcal{I}_G e_y = m\frac{\ell^2}{12}\cos^2\vartheta$. Il momento di inerzia rispetto all'asse delle y (che non è baricentrico) è (Steiner)

$$I = m\left(\ell + \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\right)^2 + I_a = m\ell^2\left(1 + \frac{\cos^2\vartheta}{4} + \cos\vartheta + \frac{\cos^2\vartheta}{12}\right) = m\ell^2\left(1 + \cos\vartheta + \frac{\cos^2\vartheta}{3}\right)$$

Si conclude quindi che l'energia potenziale del sistema è

$$V = mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta - \frac{1}{2}\Omega^2 m\ell^2\left(1 + \cos\vartheta + \frac{\cos^2\vartheta}{3}\right) \simeq m\frac{\ell}{6}\left(3g\sin\vartheta - 3\Omega^2\ell\cos\vartheta - \Omega^2\ell\cos^2\vartheta\right)$$

b. Gli equilibri sono tutte e sole le configurazioni tali che $V'(\vartheta) = 0$, ovvero i ϑ tali che

$$3g\cos\vartheta + 3\Omega^2\ell\sin\vartheta + 2\Omega^2\ell\cos\vartheta\sin\vartheta = 0$$

Volendo che $\vartheta = -\pi/3$ sia un equilibrio, si ottiene che deve valere la relazione

$$3g\frac{1}{2} = 3\Omega^2\ell\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\Omega^2\ell\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ovvero $\Omega^2 = \dfrac{\sqrt{3}g}{4\ell}$.

c. Si calcola V'' che è, a meno del fattore $m\ell/6$, la funzione $-3g\sin\vartheta + 3\Omega^2\ell\cos\vartheta + 2\Omega^2\ell\cos^2\vartheta - 2\Omega^2\ell\sin^2\vartheta$. Nell'equilibrio la derivata seconda vale $13\sqrt{3}g/8 > 0$. Quindi per il teorema dell'Hessiana non degenere si ottiene la stabilità dell'equilibrio.

d. Per calcolare le piccole oscillazioni si deve scrivere la matrice cinetica del sistema. L'energia cinetica è $T = \dot{\vartheta}^2 I/2$ dove I è il momento di inerzia di un asse passante per un vertice dell'asta ed ortogonale all'asta, che è (volendo usare Steiner) $m\ell^2/12 + m\ell^2/4 = m\ell^2/3$.

Essendo il sistema ad un grado di libertà, il calcolo della frequenza delle piccole oscillazioni si riduce ad una divisione, e porge

$$\omega^2 = \frac{13\sqrt{3}}{16}\frac{g}{\ell}.$$

Risposte ai Quesiti di Teoria

a. Si tratta dell'integrale di Jacobi, p.99 della dispensa 2013/14. Se $L = T - \mathcal{U}$, allora

$$E(q,\dot{q}) = \sum_{h=1}^{N} \dot{q}^h \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^h} - L = \sum_{h=1}^{N} \dot{q}^h \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^h} - T + \mathcal{U} =$$

$$= \sum_{h=1}^{N} \dot{q}^h \sum_{k=1}^{N} a_{hk}\dot{q}^k - T + \mathcal{U} = 2T - T + \mathcal{U} = T + \mathcal{U}$$

b. Le equazioni di Lagrange coinvolgono le derivate prime e seconde dell'immersione vincolare, dunque dobbiamo chiedere che $q \mapsto \overset{\smile}{OP}_i(q)\big|_{i=1,\ldots,n}$ siano almeno C^3 per ottenere un campo vettoriale C^1.
c. è un pendolo con viscosità. Quest'ultima serie di domande costituiscono l'Esercizio 1 a p.82 della dispensa. Dunque, pensando a Lagrange-Dirichlet, la candidata f. di Lyapunov per $\theta = 0$ (o meglio, per $(\theta,\dot{\theta}) = (0,0)$) è

$$E(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{\ell}(\cos\theta - 1)$$

oppure, equivalentemente, seguendo passo a passo il teorema,

$$W(\theta,\dot{\theta}) = T + \mathcal{U} - \mathcal{U}(0) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell cos\theta - mg\ell cos\theta\Big|_{\theta=0} = m\ell^2 E(\theta,\dot{\theta})$$

$E(\theta,\dot{\theta})$ è definita positiva attorno a $(\theta,\dot{\theta}) = (0,0)$ e la sua derivata di Lie è $\dot{E} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta\,\dot{\theta} = -k\dot{\theta}^2$. Osserviamo che $\dot{E} = -k\dot{\theta}^2 \leq 0$ ed è solo semi-definita negativa attorno a $(\theta,\dot{\theta}) = (0,0)$, dunque si deduce la sola stabilità semplice per questa strada. Ma il linearizzato di tale sistema attorno all'equilibrio è un oscillatore armonico con viscosità,

$$\dot{\theta} = v, \qquad \dot{v} = -\frac{g}{\ell}\theta - kv,$$

oppure $\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$, per cui il primo metodo (spettrale) di Lyapunov dà la stabilità asintotica.